

АЖМОЛДАЕВ ГАЗИЗ ФАЙЗУЛЛАЕВИЧ

«Өрескел шекарасы бар аймақтағы реакция-диффузия теңдеулерінің аттракторларының орташалануы»

8D05401 – «Математика» мамандығы бойынша (PhD) философия докторы дәрежесін алуға ұсынылған диссертацияның аңдатпасы

Зерттеудің өзектілігі. Қазіргі материалтану, сондай-ақ физика, биология және химиядағы қолданбалы есептер микробіртекті емес ортада (мысалы, қаңқалы құрылымдарда, кеуекті орталарда, нанокұрылымды композициялық материалдарда және т.б.) жүретін процестерді зерттеуді талап етеді. Мұндай есептерді сандық әдістер мен есептеу құралдарының көмегімен шешу айтарлықтай қиындық туғызады, себебі олар миллиардтаған айнымалылары бар алгебралық теңдеулер жүйесін зерттеуді және шешуді қажет етеді. Осындай жағдайларда асимптотикалық талдау әдістері мен орташалау теориясы көмекке келеді. Бұл әдістер бастапқы есепке шешімі жағынан жақын, бірақ құрылымы жағынан әлдеқайда қарапайым есептерді алуға мүмкіндік береді.

Аттракторлар диссипативті сызықты емес эволюциялық теңдеулердің шешімдерінің үлкен уақыт аралықтарындағы мінез-құлқын сипаттайды және сәйкес динамикалық жүйелердің шекті құрылымдарының тұрақтылығын немесе тұрақсыздығын анықтайды. Бұл мақалада теңдеудің өзінде де, шекаралық шарттарда да, локалды-периодты және кездейсоқ тербелмелі шекарасы бар аймақтағы тез тербелмелі мүшелері бар реакция-диффузия теңдеулері жүйесіндегі аттракторлардың асимптотикалық мінез-құлқы қарастырылады. Траекториялық аттракторлардың бар екені дәлелденді және локалды-периодты және статистикалық біртекті кездейсоқ тербелмелі шекара үшін реакция-диффузия теңдеулерінің шекті (орташаланған) жүйелері құрылды.

Осы диссертациялық жұмыста тербелмелі шекарасы бар аймақтағы реакция-диффузия теңдеулері жүйелерінің \mathcal{A}_ε траекториялық аттракторларының шекті жүйелердің $\bar{\mathcal{A}}$ траекториялық аттракторларына $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда әлсіз жинақталуы (стохастикалық жағдайда – «дерлік әрқашан», яғни ықтималдығы 1-ге тең) орнатылады. Мұндағы кіші ε параметрі шекараның тербелісінің периодын және амплитудасын сипаттайды. Параметр ε белгілі бір дәрежеде үшінші шекаралық шарттағы локалды-периодты тербелетін шекара бөлігіне де кіреді. Кіші параметрдің дәрежелерінің өзара қатынасына байланысты үш түрлі шектік есеп алынады (критикалық, субкритикалық және суперкритикалық жағдайлар). Есептің кездейсоқ қойылымында ε параметрі сондай-ақ шекара аймағында микробіртекті еместігін сипаттайды.

Жұмыстың мақсаты. Осы жұмыстың мақсаты – шекарасының тербелісін сипаттайтын кіші параметр нөлге ұмтылғанда, тербелетін шекарасы бар

аймақтағы тез тербелетін мүшелері бар реакция-диффузия теңдеулері жүйесіне арналған бастапқы-шекаралық есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық мінез-құлқын зерттеу.

Зерттеу әдістері. Қойылған есептерді зерттеу үшін тез тербелетін мүшелері бар бастапқы-шекаралық есептерге арналған асимптотикалық талдау әдістері мен дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге арналған орташалау теориясы қолданылады. Сонымен қатар сызықтық емес дербес туындылы теңдеулердің сапалық теориясының аппараты және функционалдық талдауның әдістері пайдаланылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста төмендегідей жаңа ғылыми нәтижелер алынған:

1. Локалды тербелетін шекарадағы үшінші шекаралық шартта белгісіз функциялардың алдындағы кіші параметрдің дәрежелері болып табылатын β және $1 - \alpha$ параметрлерінің өзара қатынасына байланысты реакция-диффузия теңдеулері жүйесінің траекториялық аттракторларының шектік мінез-құлқы сипатталды.
2. Кездейсоқ тербелетін шекарадағы үшінші шекаралық шарты бар реакция-диффузия теңдеулері жүйесінің траекториялық аттракторының шектік мінез-құлқы сипатталды.

Зерттеудің негізгі нәтижелерін сипаттау.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде тез тербелетін шекарасы бар аймақтағы реакция-диффузия теңдеулері жүйесінің траекториялық аттракторының шекарасы тегіс (жазық) аймақтағы шектік (орташаланған) есептің траекториялық аттракторына жинақталу шарттары анықталды. Осцилляцияның сипатына және параметрлерге байланысты, кіші параметр нөлге ұмтылғанда, үшінші шекаралық шарт үш түрлі шекаралық шарттың біріне өте алатыны көрсетілді: критикалық жағдайда үшінші шекаралық шарт (Фурье шарты), субкритикалық жағдайда екінші шекаралық шарт (Нейман шарты), суперкритикалық жағдайда бірінші шекаралық шарт (Дирихле шарты). Траекториялық аттракторлардың жинақталуы туралы тиісті теоремалар тұжырымдалды және дәлелденді.

Үшінші бөлімде кездейсоқ тербелетін шекарасы бар аймақтағы реакция-диффузия теңдеулері жүйесі үшін траекториялық аттрактордың жинақталу шарттары алынды. Бастапқы-шекаралық есептің траекториялық аттракторының тиісті орташаланған (шектік) есептің траекториялық аттракторына жинақталуы туралы теорема тұжырымдалды.

Алынған нәтижелердің жаңалығы мен маңыздылығын негіздеу.

Осы жұмыста алынған ғылыми нәтижелер жаңа болып табылады және теориялық сипатқа ие. Олар локалды-периодтық және кездейсоқ тербелетін шекарасы бар аймақтағы реакция-диффузия теңдеулері жүйесінің шешімдерінің ұзақмерзімді (уақыт бойынша асимптотикалық) мінез-құлқын сипаттайды. Алынған нәтижелер қолданбалы математика тұрғысынан да қызығушылық тудырады және тез тербелетін (кедір-бұдыр) шекаралары бар орталарда сұйықтық немесе газ қозғалысы сияқты тасымалдау процестерін сандық моделдеуде қолданылуы мүмкін.

Бұдан бөлек, осы жұмыстың ғылыми нәтижелері магистратура мен докторантурада кадрлар даярлау кезінде, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, орташалау теориясы және сызықтық емес теңдеулердің сапалық теориясы бойынша элективті курстар аясында білім беру үдерісінде пайдаланылуы мүмкін.

Жұмыста алынған жаңа ғылыми нәтижелер.

Осы жұмыста төмендегідей жаңа ғылыми нәтижелер алынды:

1. Локалды тербелетін шекарадағы үшінші шекаралық шартта белгісіз функциялардың алдындағы кіші параметрдің дәрежелері болып табылатын β және $1 - \alpha$ параметрлерінің өзара қатынасына байланысты реакция-диффузия теңдеулері жүйесінің траекториялық аттракторларының шектік мінез-құлқы сипатталды.

2. Кездейсоқ тербелетін шекарадағы үшінші шекаралық шарты бар реакция-диффузия теңдеулері жүйесінің траекториялық аттракторының шектік мінез-құлқы сипатталды.

Жарияланымдар. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері 11 еңбекте жарияланған (4 мақала және 7 конференция тезисі). Олардың ішінде 4 мақала Web of Science және Scopus деректер базасына кіретін журналдарда жарияланған (3 мақала – процентиі 35-тен жоғары журналдарда, 2 мақала – шетелдік басылымдарда).

1. Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Critical case // Networks and Heterogeneous Media. – 2024. – Vol. 19, Iss. 3. – P. 1381–1401 (IF2024=1.3, Q3; CiteScore2024=1.9, процентиі 43).

2. Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Supercritical case // Ufa Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 17, Iss. 2. – P. 91–104 (IF2024=0.4, Q4; CiteScore2024=1.2, процентиі 43).

3. Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Subcritical case // Bulletin of the Karaganda University.

Mathematics series. – 2025. – Vol. 118, Iss. 2. – P. 28–43 (IF2024=0.9, Q2; CiteScore2024=1.4, процентиль 53).

4. Homogenization of attractors to the reaction-diffusion system in a domain with rough boundary // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2025. – Vol. 126, Iss. 2. – P. 3–24 (IF2024=0.3, Q4; CiteScore2025=0.4 процентиль 18).

Халықаралық конференциялар материалдарындағы тезистер.

1. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // «Ломоносов – 2024» студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың ХІХ халықаралық ғылыми конференциясы, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 2024. – С. 12-13).

2. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Мәскеу университетінің 270 жылдығына арналған халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция материалдары, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 2024. – С. 41-48).

3. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Талдау, дифференциалдық теңдеулер және алгебраның өзекті мәселелері (EMJ-2025). «Eurasian Mathematical Journal» журналының 15 жылдығына арналған халықаралық конференция тезистерінің жинағы, Л.Н. Гумилёв атындағы Еуразия ұлттық университеті (Астана, 2025. – С. 76-77.)

4. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей // «Ломоносов – 2025» студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың ХХ халықаралық ғылыми конференциясы, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 2025. – С. 12-15).

5. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Академик Ш.А. Әлимовтың 80 жылдық мерейтойына арналған республикалық ғылыми конференция, Мирзо Ұлықбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті (Ташкент, 2025. – С. 179-180).

6. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // Көрнекті математик И.Г. Петровскийге арналған халықаралық конференция, М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті (Москва, 2025. – С. 12-13).

7. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // 15th ISAAC Congress, Nazarbayev university (Astana, 2025. – P. 167).

Алынған нәтижелердің апробациясы.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері төмендегі конференцияларда баяндалды:

1. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // РАН академигі В.А. Садовничийдің 85

жылдық мерейтойына арналған «Ғылымдар тоғысындағы математика» халықаралық ғылыми конференциясы, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 1-2 сәуір 2024 жыл).

2. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Мәскеу университетінің 270 жылдығына арналған, студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың «Ломоносов – 2024» ХІХ халықаралық ғылыми конференциясы, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 19-20 сәуір 2024 жыл).

3. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Мәскеу университетінің 270 жылдығына арналған «Іргелі ғылым және ХХІ ғасырдың басымдықтары» халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 29 қараша 2024 жыл).

4. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Талдау, дифференциалдық теңдеулер және алгебраның өзекті мәселелері (EMJ-2025). «Eurasian Mathematical Journal» журналының 15 жылдығына арналған халықаралық конференция тезистерінің жинағы, Л.Н. Гумилёв атындағы Еуразия ұлттық университеті (Астана, 7-11 қаңтар 2025 жыл).

5. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей // «Ломоносов – 2025» студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың ХХ халықаралық ғылыми конференциясы, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 11-12 сәуір 2025 жыл).

6. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Академик Ш.А. Әлимовтың 80 жылдық мерейтойына арналған «Математикалық физиканың заманауи әдістері және олардың қолданылуы» республикалық ғылыми конференциясы, Мирзо Ұлықбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті (Ташкент, 22-24 сәуір 2025 жыл).

7. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // Көрнекті математик И.Г. Петровскийге арналған «Дифференциалдық теңдеулер және іргелес мәселелер» халықаралық конференциясы М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті (Мәскеу, 19-23 мамыр 2025 жыл).

8. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // 15th ISAAC Congress, Nazarbayev university (Astana, 21-25 шілде 2025 жыл).

Бұдан бөлек, жұмыс нәтижелері төмендегі ғылыми семинарларда талқыланды:

1. М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультетінің математикалық физика теңдеулері бойынша ғылыми семинары. Жетекшісі: Г.А. Чечкин (Мәскеу, 18 қыркүйек 2024 жыл).

2. «Функционалдық анализ және оның қолданылулары» ғылыми семинары. Жетекшілері: ҚР ҰҒА академигі М. Өтелбаев, ҚР ҰҒА академигі Р.О. Ойнаров, профессорлар Е.Д. Нұрсултанов және Қ.Н. Оспанов (Астана, 13 наурыз 2025 жыл; 5 маусым 2025 жыл).

3. Л.Н. Гумилёв атындағы Еуразия ұлттық университетінің «Фундаменталды математика» кафедрасының ғылыми семинары (Астана, 25 қыркүйек 2025 жыл).

Докторанттың әр жарияланымды дайындаудағы үлесі.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері 4 ғылыми мақалада жарияланған. Барлық мақалалар авторлық бірлестікте дайындалған. Бұл еңбектерде есептердің қойылымы мен зерттеу әдіснамасын таңдау ғылыми кеңесшілер тарапынан ұсынылды, ал докторант негізгі және қосымша нәтижелерді өздігінен тұжырымдап, олардың дәлелдемелерін келтірді.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі.

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімден, қорытындыдан және пайдаланылған дереккөздер тізімінен тұрады. Формулалардың нөмірленуі келесідей ұйымдастырылған: бірінші сан – бөлім нөмірі, екінші сан – бөлімше нөмірі, үшінші сан – осы бөлімшедегі формуланың реттік нөмірі. Теоремалар, леммалар, тұжырымдар және ескертпелердің нөмірленуі де үш деңгейлі және осы схема бойынша жүргізіледі. Жұмыстың жалпы көлемі 100 беттен тұрады.

Жұмыстың негізгі мазмұны.

Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы негізделеді, зерттеудің мақсаты, объектісі, пәні және міндеттері тұжырымдалады. Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстардың тізімі, сондай-ақ зерттеу нәтижелері баяндалған конференциялар мен семинарлардың тізімі келтіріледі.

Диссертацияның **бірінші бөлімінде** автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторларына байланысты негізгі ұғымдар қарастырылады. Атап айтқанда, мұнда траекториялық аттрактордың анықтамасы, оны құру схемасы және оған қатысты тиісті тұжырымдар келтіріледі. Сонымен қатар, осы тарауда шекараның кездейсоқ тербелісін сипаттайтын ықтималдық құрылымы анықталады. Бұдан бөлек, Биркгофтың эргодикалық теоремасын қолдануға мүмкіндік беретін шарттар тұжырымдалып, негізделеді.

Екінші бөлімде тез тербелетін шекарасы бар микробіртекті аймақтағы орташалау есебі қарастырылады. Аймақта тез тербелетін мүшелері бар және диссипациясы бар сызықтық емес реакция-диффузия теңдеулері жүйесі берілген деп ұйғарылады. Локалды периодты тербелетін шекара бөлігінде шекара тербелісін сипаттайтын кіші параметрге тәуелді тез тербелетін коэффициенттері бар үшінші шекаралық шарт қойылады. Кіші параметр дәрежелерінің шекаралық шарттағы арақатынасына байланысты әртүрлі орташаланған (шектік) есептер алынады (критикалық, субкритикалық және суперкритикалық жағдайлар). Әрбір жағдайда бастапқы реакция-диффузия жүйесінің траекториялық аттракторларының орташаланған (шектік) жүйенің траекториялық

аттракторларына жинақталуы туралы теорема дәлелденеді. Сонымен қатар, жүйе шешімі жалғыз болған жағдайда, глобалдық аттракторлардың да жинақталуы дәлелденеді.

Үшінші бөлімде кездейсоқ тез тербелетін шекарасы бар аймақтағы реакция-диффузия теңдеулері жүйесі қарастырылады. Шекараның статистикалық біртекті кездейсоқ құрылымы болған жағдайда детерминирленген (кездейсоқ емес) коэффициенттері бар орташаланған реакция-диффузия жүйесі алынады. Бұрынғы бөлімдегідей, бастапқы Коши есебінің траекториялық және глобалдық аттракторларының шектік есептің траекториялық және глобалдық аттракторларына жинақталуы туралы теорема дәлелденеді.